
UNI CEI ENV 13005

(GUIDA ALL'ESPRESSIONE DELL'INCERTEZZA DI MISURA)

Università degli Studi di Brescia
Corso di Fondamenti della Misurazione
A.A. 2002-03

Appunti a cura di Giorgio Corini 38235

0. INTRODUZIONE

- 0.2** CONCETTO DI INCERTEZZA: “allorquando tutte le componenti di errore note o ipotizzate siano state valutate e le relative correzioni apportate, rimane tuttavia un’incertezza sulla correttezza del risultato, vale a dire un dubbio su quanto bene questo rappresenti il valore della quantità misurata”.
- 0.4** Il *metodo* per valutare ed esprimere l’incertezza deve essere *universale*. Vale a dire applicabile a tutti i tipi di misurazione e di dati.
La *grandezza* usata per esprimere l’incertezza deve essere:
-internamente coerente
-trasferibile: “l’incertezza valutata per un risultato deve essere direttamente utilizzabile come componente nella valutazione dell’incertezza di un’altra misurazione in cui intervenga il primo risultato”.
- 0.7** RACCOMANDAZIONE INC-1 (1980): ESPRESSIONE DELLE INCERTEZZE SPERIMENTALI
- 1) Le componenti dell’incertezza possono essere di 2 tipi:
 - A- valutate con metodi statistici
 - B- valutate con altri metodi
 - 2) Le componenti di tipo A sono caratterizzate dalle *varianze stimate* s_i^2 (o “*scarti tipo*” *stimati* s_i) e dai *gradi di libertà* v_i . Se necessario vanno anche indicate le *covarianze*.
 - 3) Le componenti di tipo B sono caratterizzate dalle grandezza u_j^2 (approssimazioni delle varianze corrispondenti, che si considerano esistenti).
Le u_j^2 e le corrispondenti u_j vengono trattate come varianze e scarti tipo.
 - 4) L’*incertezza composta* si ottiene applicando il metodo abituale di composizione della varianze e deve essere espressa sotto forma di scarti tipo.
 - 5) Se si deve moltiplicare l’incertezza composta per un valore per ottenere un’incertezza globale, il fattore moltiplicativo va indicato.

2.DEFINIZIONI

- 2.2.1** “*Incetezza* di misura significa, nella sua accezione più comune, *dubbio* circa la validità del risultato di una misurazione”. Non esistono termini diversi per esprimere questo *concetto generale* e le *misure quantitative* di tale concetto, come lo scarto tipo, si deve usare la stessa parola “*incetezza*” per entrambi i significati.
- 2.2.3** DEFINIZIONE FORMALE:
INCERTEZZA (DI MISURA): “*parametro, associato al risultato di una misurazione, che caratterizza la dispersione dei valori ragionevolmente attribuibili al misurando*”.

Nota 1. Il parametro può essere, ad esempio, uno scarto tipo od un suo multiplo, o la semiampiezza di un intervallo avente livello di fiducia stabilito.

Nota 2. L'incertezza è composta da più componenti. Talune (tipo A) ricavabili dalla distribuzione statistica dei risultati: gli scarti tipo sperimentali. Altre (tipo B), valutate da distribuzioni di probabilità ipotizzate sulla base dell'esperienza o di altre informazioni: gli scarti tipo.

3. CONCETTI FONDAMENTALI

3.1 MISURAZIONE

- 3.1.1** “una misurazione [...] comincia con una adeguata *definizione del misurando, del metodo di misurazione e del procedimento di misurazione*”.
- 3.1.2** Essendo il *risultato di una misurazione* un'approssimazione o *stima*, deve essere accompagnato da una dichiarazione dell'*incertezza*.
- 3.1.3** “Il misurando dovrebbe essere definito con completezza sufficiente rispetto all'accuratezza richiesta, in modo che il suo *valore sia unico a tutti gli effetti pratici* associati alla misurazione”.
- 3.1.5** “Si ipotizza che le variazioni in osservazioni ripetute insorgano in quanto le *grandezze di influenza*, che possono, appunto, influenzare il risultato della misurazione, non sono mantenute costanti”.
- 3.1.6** Il *modello matematico* che trasforma le osservazioni ripetute nel risultato della misurazione è di cruciale importanza.

3.2 ERRORI, EFFETTI E CORREZIONI

- 3.2.1** Gli *errori* possono essere visti come composti da due componenti:
- la componente *CASUALE*
- la componente *SISTEMATICA*
- 3.2.2** *Errori casuali*: sono originati da variazioni *non prevedibili o casuali* delle grandezze di influenza.
Possono essere ridotti aumentando il numero delle misurazioni: la loro *speranza matematica* o *valore atteso* o *valor medio* è zero.
- 3.2.3** *Errori sistematici*: non possono essere eliminati ma ridotti attraverso un *fattore di correzione*.
Si ipotizza che dopo tale correzione l'errore sia zero.

3.3 INCERTEZZA

- 3.3.1** “Il risultato di una misurazione, pur dopo esser stato corretto per gli effetti sistematici identificati, è ancora solamente una *stima* ” a causa degli errori casuali e della non perfetta depurazione dagli errori sistematici.
- 3.3.2** La classificazione in categorie A e B dell’incertezza (cfr. 0.7) ha unicamente utilità didattica. Entrambi i tipi di valutazione sono basati su *distribuzioni di probabilità* e ambedue i metodi hanno come risultato *varianze* o *scarti tipo*.
- 3.3.5** - L’incertezza di tipo A è ricavata da densità di probabilità di una *distribuzione osservata*;
- l’incertezza di tipo B è ricavata da densità di probabilità di una *probabilità soggettiva*.
- 3.3.6** $u_c = \text{incertezza tipo composta}$

$$u_c = \sqrt{\sum_{i=1}^N u_i^2 \cdot a_i}$$

- 3.3.7** *Incetzza estesa* = $U = U_c \cdot k$ (dove k è detto *fattore di copertura*).
L’incertezza estesa può essere utilizzata per vari motivi, uno dei quali è la sicurezza in determinati tipi di applicazioni.

3.4 CONSIDERAZIONI PRATICHE

- 3.4.1** “Se si facessero variare tutte le grandezze da cui dipende il risultato di una misurazione, la sua incertezza potrebbe essere valutata usando esclusivamente metodi statistici”.
Non essendo quasi mai possibile nella pratica questa procedura si fa ricorso a *modelli matematici*.
- 3.4.2** I modelli matematici sono incompleti, dunque, nei limiti del possibile, conviene variare tutte le grandezze interessate nel campo il più ampio ammissibile nella pratica.
- 3.4.5** Nella pratica (ad esempio nelle tarature), essendo *trascurabili le incertezze del campione* rispetto all’accuratezza richiesta, tali incertezze possono essere tralasciate e si può così valutare l’errore del dispositivo confrontato.
- 3.4.6** Se si fa uso di campioni diversi dalle unità di misura del Sistema Internazionale (SI), si possono avere incertezza inferiori rispetto a quelle che si avrebbero esprimendo il valore della misurazione in unità del SI. Ciò a causa dell’incertezza nella conversione tra il campione utilizzato e quello adottato dal SI.
- 3.4.7** Le valutazioni dell’incertezza non sono concepite per tenere conto degli errori dovuti a sviste di registrazione e di analisi.

4. VALUTAZIONE DELL'INCERTEZZA TIPO

4.1 MODELLO DELLA MISURAZIONE

4.1.1 Detto Y il misurando si ha in generale che:

$$Y = f(X_1, X_2 \dots, X_N) \quad [1]$$

4.1.2 $X_1, X_2 \dots, X_N$ possono essere a loro volta essere considerati misurandi e dipendere da altre grandezze, come correzioni e fattori di correzione per effetti sistematici. Questo significa che f può essere tanto complicata da non poter essere scritta esplicitamente; può quindi talvolta essere determinata sperimentalmente oppure può essere ricavabile tramite un algoritmo numerico.

4.1.3 $X_1, X_2 \dots, X_N$ sono classificati come:

- grandezze i cui valori e le cui incertezze sono valutati direttamente nella misurazione sulla base di osservazioni ripetute o dell'esperienza;
- grandezze i cui valori e le cui incertezze sono introdotti nella misurazione da fonti esterne (campioni tarati, materiali di riferimento certificati, dati da manuali).

4.1.4 Dalla [1] si ottiene una stima y del misurando Y , usando le stime di ingresso $x_1, x_2 \dots, x_N$ per i valori di $X_1, X_2 \dots, X_N$.

$$\Rightarrow y = f(x_1, x_2 \dots, x_N) \quad [2]$$

nota : in certi casi si può avere:

$$y = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{N,k})$$

questa formula esprime il valore medio di n misurazioni indipendenti Y_k di Y , tutte con uguale incertezza e ciascuna con gli X_i ottenuti simultaneamente. Tale metodo è preferibile a

$y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N)$ quando f non è lineare; se è lineare ottengo uguali risultati con i due metodi.

4.1.5 Associato alla stima di uscita ho uno scarto tipo stimato, denominato *incertezza tipo composta* ed indicato con $u_c(y)$ associato ai vari $u(x_i)$.

4.1.6 Ciascuna stima d'ingresso x_i e ciascuna incertezza tipo corrispondente $u(x_i)$ sono ricavate da una distribuzione di valori possibili di X_i . Tale distribuzione può esser basata su *frequenze empiriche* (A) o può essere una *distribuzione iniziale* (B).

4.2 VALUTAZIONE DI CATEGORIA A DELL'INCERTEZZA TIPO

4.2.1 In generale se si hanno n osservazioni indipendenti q_k la miglior stima del valore atteso m_q è la media aritmetica \bar{q}

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k \quad [3]$$

$\Rightarrow x_i = \bar{X}_i$ da inserire nella [2]

4.2.2 Definiamo ora la *VARIANZA SPERIMENTALE* $s^2(q_k)$ delle osservazioni q_k che stima la varianza σ^2 della distribuzione di probabilità di q :

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2 \quad [4]$$

$s(q_k)$ è lo *SCARTO TIPO SPERIMENTALE* e caratterizza la dispersione attorno alla media \bar{q}

4.2.3 La miglior stima della *varianza della media* $s^2(\bar{q}) = s^2/n$ è data da

$$s^2(\bar{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n} \quad [5]$$

$s(\bar{q})$ è lo *SCARTO TIPO SPERIMENTALE DELLA MEDIA*, quantifica quanto bene \bar{q} stimi il valore atteso m_q di q e, insieme al suo quadrato $s^2(\bar{q})$, può essere usato come valutazione quantitativa dell'incertezza di \bar{q} .

$$\Rightarrow u(x_i) = s(\bar{X}_i)$$

nota: nella costruzione di intervalli di fiducia si deve tener conto della differenza tra $s^2(\bar{q})$ e $s^2(q_k)$ e in questo caso si fa tramite la distribuzione *t di Student*.

4.2.4 Se ho a disposizione una stima cumulata di s_i^2 la varianza sperimentale è stimata meglio da s_p^2/n e $u = s_p/\sqrt{n}$.

4.2.6 Andrebbero sempre dichiarati i gradi di libertà v_i di $u(x_i)$, pari a $n-1$ nel caso semplice in cui $x_i = \bar{X}_i$ e $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$.

4.3 VALUTAZIONE DI CATEGORIA B DELL'INCERTEZZA TIPO

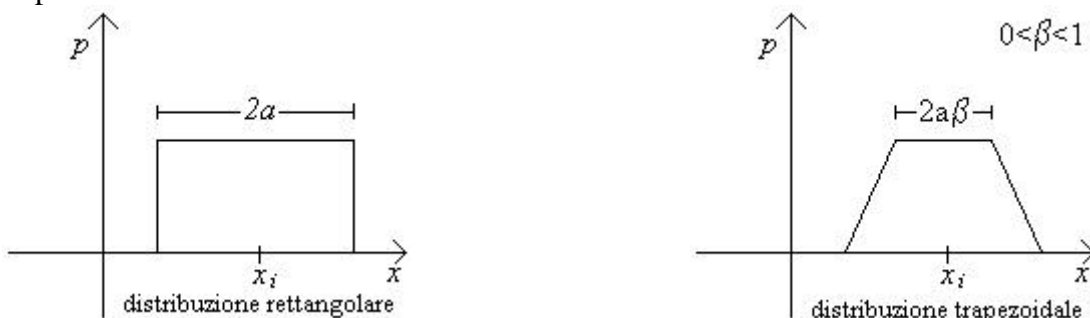
- 4.3.1** La varianza stimata $u^2(x_i)$ e incertezza tipo $u(x_i)$ vengono valutate per mezzo di un *giudizio scientifico* basato sulle possibili informazioni sulla variabilità di X_i .
- 4.3.2** Una valutazione di categoria B può essere tanto attendibile quanto una di categoria A, soprattutto quando quella di categoria A dipende da un numero ridotto di osservazioni statisticamente indipendenti.
- 4.3.3** Quando le stime x_i sono date dai produttori o dai manuali, spesso l'incertezza è definita come multiplo dello scarto tipo; in questo caso per ottenere l'incertezza tipo $u(x_i)$ è sufficiente dividere il valore fornito per il *coefficiente moltiplicatore* indicato.
- 4.3.4** In certi casi non viene indicato dal produttore il moltiplicatore ma il *livello di fiducia*. In tali casi si suppone (ove non diversamente specificato) una distribuzione normale e quindi si ricavano i moltiplicatori.
- 4.3.7** Qualora si sappia che la probabilità che X_i giaccia in un intervallo compreso tra a_- e a_+ è uguale, a tutti i fini pratici, a 1, ma non si può dir nulla sulla distribuzione entro l'intervallo, si assume:

$$x_i = (a_- + a_+)/2$$

$$\boxed{u^2(x_i) = \frac{a^2}{3}} \quad \text{dove} \quad a = \frac{1}{2}(a_+ - a_-) \quad [7]$$

Quella appena riportata rappresenta la *varianza di una distribuzione rettangolare*.

- 4.3.8** Capita che i semintervalli di incertezza siano diseguali in casi come quello di 4.3.7, ma non conviene cambiare modo di valutazione, al più spesso è meglio spostare la stima x_i per "centrarla" nell'intervallo.
- 4.3.9** I casi visti sopra di distribuzione rettangolare generalmente non hanno significato fisico, quindi ove sia possibile è sempre meglio sostituire la distribuzione rettangolare con una distribuzione trapezoidale.



In una distribuzione trapezoidale si ha $u^2(x_i) = a^2 \frac{(1 + b^2)}{6}$

- ⇒ $\beta = 1 \rightarrow$ distribuzione rettangolare
 $\beta = 0 \rightarrow$ distribuzione triangolare

5. DISTRIBUZIONE DELL'INCERTEZZA TIPO COMPOSTA

5.1 GRANDEZZE D'INGRESSO NON CORRELATE

5.1.1 L'incertezza tipo di y , che è la stima di Y , e quindi il risultato della misurazione, è ottenuta mediante composizione delle incertezze tipo delle stime di ingresso $x_1, x_2 \dots, x_N$ ed è denominata $u_c(y)$.

$$5.1.2 \quad \boxed{u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)} \quad [10]$$

Dove f è la funzione specificata in [1].

Questa formula è ricavata da uno sviluppo in serie di Taylor della [1] fermato al primo ordine e, insieme alla [13] di seguito indicata, costituisce la **LEGGE DI PROPAGAZIONE DELL'INCERTEZZA**.

nota: qualora la non linearità di f sia significativa, è necessario ricorrere anche al *secondo ordine* dello sviluppo.

5.1.3 Le $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sono uguali alle $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ per $X_i = x_i$.

Esse stimano la variazione di y dovuta alle variazioni delle singole x_i , quindi possiamo scrivere:

$$(\Delta y)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i.$$

Perciò l'incertezza tipo $u(x_i)$ provoca una variazione $(\Delta y)_i$ che possiamo stimare pari a:

$\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u(x_i)$ e la varianza composta $u_c^2(y)$ può essere vista come somma dei quadrati di questi

termini. Alla luce di queste considerazioni possiamo riscrivere la [10] così:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 \equiv \sum_{i=1}^N u_i^2(y) \quad [11 a]$$

dove:

$$c_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{x_1, x_2, \dots, x_N} \quad \text{e} \quad u_i(y) = |c_i| \cdot u(x_i) \quad [11 b]$$

i c_i vengono definiti *coefficienti di sensibilità*.

5.1.4 I c_i possono anche essere determinati sperimentalmente ponendo mano al calcolo numerico, cioè facendo variare una alla volta le x_i di piccolissimi intervalli e valutando la variazione corrispondente di y , per poi ricavarne il rapporto, che, in accordo con la [11 b] rappresenta appunto c_i .

5.1.5 Se Y è della forma $Y = cX_1^{p_1} X_2^{p_2} \dots X_N^{p_N}$ con p_1, p_2, \dots, p_N noti con incertezza trascurabile, allora la [10] può essere scritta così:

$$[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^N [p_i u(x_i)/x_i]^2$$

Si noti che qui si usa in luogo della varianza composta la *varianza composta relativa* e, in luogo della varianza stimata $u^2(x_i)$ la *varianza relativa stimata* $[u(x_i)/x_i]^2$.

nota: se $p_i = \pm 1 \quad \forall i$, allora la varianza composta relativa è uguale alla somma delle varianze relative dei singoli termini x_i .

5.2 GRANDEZZE DI INGRESSO CORRELATE

$$5.2.2 \quad u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot u(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot u(x_i, x_j) \quad [13]$$

dove $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ è la *covarianza stimata* associata a x_i e x_j . Il grado di correlazione tra x_i e x_j è caratterizzato dal *coefficiente di correlazione stimato*:

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \quad [14]$$

dove $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$ e $-1 \leq r(x_i, x_j) \leq 1$.

Se le stime x_i e x_j sono indipendenti, allora avremo che $r(x_i, x_j) = 0$ e la variazione di una non comporta una variazione dell'altra.

nota: le varianze e covarianze stimate possono essere inserite in una *matrice di covarianza*.

5.2.3 Date \bar{q} ed \bar{r} che stimano m_q e m_r di due grandezze q ed r casuali, siano \bar{q} ed \bar{r} ricavate da n coppie di osservazioni indipendenti simultanee. Allora la *covarianza calcolata* è pari a:

$$s(\bar{q}, \bar{r}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})(r_k - \bar{r}) \quad [17]$$

Se le osservazioni sono scorrelate ci si aspetta che la covarianza calcolata sia prossima a zero.

Si ha perciò la seguente relazione:

$u(x_i, x_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$ con $s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$ calcolato mediante la [17].

$$r(x_i, x_j) = r(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = \frac{s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)}{s(\bar{X}_i)s(\bar{X}_j)}$$

5.2.4 Vi può essere una correlazione significativa tra le due grandezze di ingresso se viene usato nella loro determinazione lo stesso strumento o campione o lo stesso dato di riferimento.

6. DETERMINAZIONE DELL'INCERTEZZA ESTESA

6.1 INTRODUZIONE

- 6.1.1** Le più importanti “raccomandazioni” e il C.I.P.M. richiedono l’uso dell’incertezza composta $u_c(y)$ quale parametro per l’espressione quantitativa dell’incertezza.
- 6.1.2** In talune applicazioni industriali e commerciali e normative, soprattutto in questioni di salute e sicurezza pubblica, è tuttavia spesso utilizzata una valutazione dell’incertezza che comprenda gran parte della distribuzione dei valori che possono essere ragionevolmente attribuiti al misurando

6.2 INCERTEZZA ESTESA

- 6.2.1** L’incertezza di cui al punto 6.1.2 è definita *incertezza estesa* ed è indicata con U .
 $U = k u_c(y)$ dove k è chiamato *fattore di copertura*.
Il risultato della misurazione sarà allora :

$$Y = y \pm U \quad \text{o} \quad y - U \leq Y \leq y + U$$

- 6.2.2** Le espressioni *intervallo di fiducia* o *livello di fiducia* hanno definizioni specifiche in statistica e si possono applicare ad U solo sotto certe condizioni, ad esempio che tutte le componenti dell’incertezza che contribuiscono a $u_c(y)$ derivino da valutazioni di categoria A.
A livello pratico per quanto riguarda U parleremo eventualmente di *probabilità di copertura* o *livello di fiducia* dell’intervallo e lo indicheremo con p .
- 6.2.3** Qualora sia possibile, andrebbe sempre stimata p , in quanto U , in sé, non aggiunge informazioni a $u_c(y)$ ma si limita a presentare le informazioni esistenti in forma diversa. Tuttavia è spesso impossibile determinare p con sicurezza, a causa della non esatta conoscenza delle distribuzioni e dell’incertezza $u_c(y)$ stessa.

6.3 SCELTA DEL FATTORE DI COPERTURA

- 6.3.1** k varia a seconda delle situazioni ma in generale è nel campo tra 2 e 3. L’esperienza e le conoscenze sul fenomeno sono molto importanti nella scelta di k .
nota: talvolta si evitano delle correzioni note ad un effetto sistematico e si allarga poi l’incertezza tramite k . Ciò dovrebbe essere evitato tolto casi specialissimi, perché “la valutazione dell’incertezza del risultato di una misurazione non deve essere confusa con l’assegnazione di un limite di sicurezza”.
- 6.3.3** Se la distribuzione di probabilità caratterizzata da y e $u_c(y)$ è approssimativamente *normale* e con un numero sufficiente di gradi di libertà:

$$k = 2 \rightarrow p \approx 95\%$$

$$k = 3 \rightarrow p \approx 99\%$$

7. DICHIARAZIONE DELL'INCERTEZZA

La dichiarazione dell'incertezza varia a seconda del tipo di applicazione, ma a livello generale è sempre meglio *abbondare nelle informazioni* fornite. Va sempre indicata la stima y così come l'incertezza composta $u_c(y)$; se si utilizza U va necessariamente indicato anche il fattore di copertura k ; quando opportuna va indicata anche l'incertezza composta relativa $u_c(y)/|y|$ (con $y \neq 0$). Spesso è utile indicare anche i gradi di libertà effettivi stimati n_{eff} . Se si misurano simultaneamente più misurandi va indicata anche la matrice dei coefficienti di correlazione. Nei risultati è utile evitare troppe cifre significative ed eventualmente arrotondarle per eccesso anziché alla cifra più vicina.

Se possibile indicare anche la relazione funzionale $Y = f(X_1, X_2 \dots, X_N)$ analiticamente o, dove non sia possibile analiticamente, indicando l'algoritmo o procedimento associato.

APPENDICE B : termini metrologici generali

B.2 DEFINIZIONI

- B.2.1** Grandezza (misurabile): attributo di un fenomeno, di un corpo, o di una sostanza che può essere distinto qualitativamente e determinato quantitativamente.
- B.2.2** Valore (d'una grandezza): espressione quantitativa di una grandezza in senso determinato, generalmente in forma di una unità di misura moltiplicata per un numero.
- B.2.3** Valore vero (d'una grandezza): valore compatibile con la definizione di una data grandezza in senso determinato.
nota1: esso è il valore che si otterrebbe con una misurazione perfetta.
nota2: i valori veri sono per natura indeterminati.
- B.2.4** Valore convenzionalmente vero (d'una grandezza): valore attribuito ad una grandezza in senso determinato e accettato, a volte per convenzione, come avente un'incertezza adatta per un dato scopo.
- B.2.5** Misurazione: insieme di operazioni che ha lo scopo di determinare il valore di una grandezza.
- B.2.6** Principio di misurazione: base scientifica di una misurazione.
- B.2.9** Misurando: grandezza in senso determinato sottoposta a misurazione.
- B.2.12** Risultato bruto: risultato di una misurazione prima della correzione dell'errore sistematico.
- B.2.21** Errore casuale: risultato di una misurazione meno la media di un numero infinito di misurazioni dello stesso misurando effettuate in condizioni di ripetibilità.
- B.2.22** Errore sistematico: media che risulterebbe da un numero infinito di misurazioni effettuate sotto condizioni di ripetibilità, meno un valore vero del misurando.
- B.2.23** Correzione: valore aggiunto algebricamente al risultato di una misurazione per compensare l'errore sistematico.
nota: la correzione è uguale all'errore sistematico cambiato di segno.

APPENDICE G

G.2 TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

- G.2.1** La distribuzione di Y sarà approssimativamente normale con valore atteso $E(Y) = \sum_{i=1}^N c_i E(x_i)$ e varianza $\mathbf{s}^2(Y) = c_i^2 \mathbf{s}^2(X_i)$ se le X_i sono indipendenti e se $\mathbf{s}^2(X_i)$ è molto più grande di ciascuna singola componente $c_i^2 \mathbf{s}^2(X_i)$ originata da una X_i avente distribuzione non normale. (Y è nella forma $Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_N X_N$)
- G.2.2** Il teorema del limite centrale indica la grande importanza di \mathbf{s}^2 rispetto ai momenti di ordine superiore nella determinazione della forma della convoluzione e che, maggiore è N , più prossima sarà la distribuzione a quella normale. Inoltre: la convergenza è tanto più rapida quanto più i valori di ogni $c_i^2 \mathbf{s}^2(X_i)$ sono tra loro simili; quanto più prossime ad una distribuzione normale sono le singole distribuzioni delle X_i , tanto più piccolo è il numero di queste necessario perché sia normale la risultante distribuzione di Y .